

Consequências da I Guerra Mundial na elaboração dos livros de Probabilidade

Doutor
Filipe Papança



Introdução

O contexto cultural exerceu uma influência decisiva no desenvolvimento da Matemática. Os problemas vividos nos campos de batalha, mormente os relacionados com o tiro de armas, motivaram o desenvolvimento da Matemática e da Estatística. Em termos didáticos, tal facto motivou uma nova geração de manuais resultantes de uma reflexão assente na prática dos conflitos e dos problemas com eles relacionados. Findas as hostilidades, o regresso à normalidade permitiu reunir, organizar, revelar e divulgar o novo conhecimento, entretanto, surgido. Essa reflexão e compilação deram origem a novos manuais trazendo à luz novos conhecimentos, novos métodos de exposição, já completamente libertos da influência dos Elementos de Euclides, apenas se mantendo a preocupação pelo rigor, a clareza de exposição, o encadeamento lógico e o aspeto didático.

Após a I Guerra Mundial, as principais obras não surgem já assinadas pelos “Matemáticos ditos influentes” (estes aparecem apenas como prefaciadores, orientadores e organizadores), mas por militares que estiveram na guerra e viveram de perto as situações ou por académicos que estiveram em contacto com eles. Por essa razão, os exemplos dados não são meramente didáticos, embora essa preocupação esteja sempre

presente como se pode constatar nas obras *La probabilité dans les Tirs de Guerre* (1919), de Jean Aubert, de 1919, com prefácio de M. M. d'Ocane, professor da Escola Politécnica, *Applications au Tir* (1926), de J. Haag, integrando o tomo IV denominado *Applications Diverses et Conclusion*, da obra de Émile Borel, *Traité du Calcul, dès Probabilités et de ses Applications*, em que colaboraram igualmente matemáticos como L. Blaringhen, C. V.L. Charlier; L. Deltheil, P. Dubreil, M Fréchet, H. Galbrun, F. Perrin e P. Traynard.

Probabilité du Tir - capitão S. Burileano

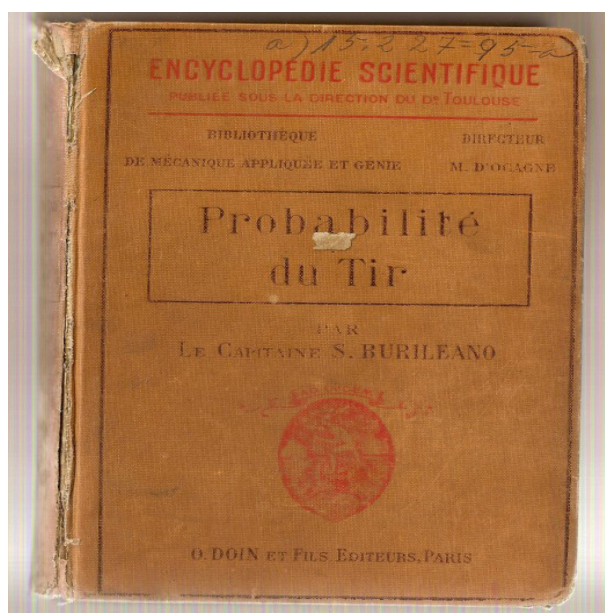


Figura 1 - Probabilité du Tir - S. Burilano.

O objetivo desta obra, segundo é dito no seu prefácio, é de colocar nas mãos dos oficiais de todas as armas um livro contendo o desenvolvimento completo das aplicações da teoria geral das probabilidades ao estudo experimental e à prática do tiro da espingarda e do canhão e, ao mesmo tempo, apresentar aos especialistas e ao grande público os princípios da dita teoria de uma forma acessível.

A obra começa com uma introdução que inclui a recapitulação das principais noções de matemáticas que figuram nos capítulos relativos à teoria das probabilidades, designadamente, em demonstrações: fórmulas das permutações e do binómio, operações com logaritmos, máximos e mínimos, mudança de eixos, equações do círculo e da elipse, pontos de inflexão, cálculo diferencial e integral (diferencial, integral definido, integral indefinido, integração por partes, mudança de variável) e mecânica (definição de média como centro de gravidade das observações), terminando com uma listadas abreviaturas

utilizadas.

O primeiro e segundo capítulos contém os princípios elementares da teoria das probabilidades, terminando ambos com resumos, com o objetivo, no que concerne ao grande público, de adquirir sem nenhuma dificuldade as noções de cálculo das probabilidades, permitindo aos oficiais passar rapidamente da teoria propriamente dita para o capítulo das aplicações.

No capítulo primeiro são abordados os temas: definição matemática da probabilidade; probabilidade total; probabilidade composta (definida como a probabilidade que resulta da associação de vários outros eventos, o que hoje se denomina probabilidade condicionada); probabilidade das causas (entendendo-se como causa o conjunto de circunstâncias que assistem à produção de um evento de uma probabilidade determinada); probabilidade das provas repetidas; fórmula de Bernoulli, erro relativo, erro absoluto, erro provável e suas aplicações.

O capítulo segundo começa com uma introdução à lei de Gauss, a partir da curva de dispersão de um tiro de canhão, sendo deduzida a sua fórmula, descritas as suas características, apresentada uma tábua numérica de valores, passando-se de seguida à composição dos erros, módulo de precisão, fórmula de Fourier, dispersão em altura, caso de duas grandezas, elipses de igual probabilidade, elipse provável, determinação da posição das elipses, acontecimentos independentes, acontecimento provável sobre um eixo qualquer, passando posteriormente à descrição dos diversos tipos de tiro e suas implicações no cálculo de trajetórias, terminando com uma série de considerações sobre a justeza e precisão.

No capítulo terceiro é apresentado um estudo experimental dos tiros de artilharia e de infantaria, aplicado à prática do tiro de diferentes armas: canhão, fusil e obus, sendo enunciados problemas práticos, seguidos da respetiva resolução.

Applications au Tir - J. Haag

O objetivo desta obra é de expor, de forma sucinta e o mais completa possível, os resultados conhecidos à data sobre a probabilidade do tiro, acrescidos dos trabalhos pessoais escritos durante a guerra e que a redação do livro obrigou o autor a terminar.

A obra começa com uma introdução à noção de dispersão aplicada à probabilidade do tiro no capítulo primeiro, sendo tecidas algumas considerações sobre o ponto médio como sinónimo de centro de dispersão, a posição provável do ponto de impacto ou de explosão^[1]; erro médio, erro médio quadrático e erro provável.

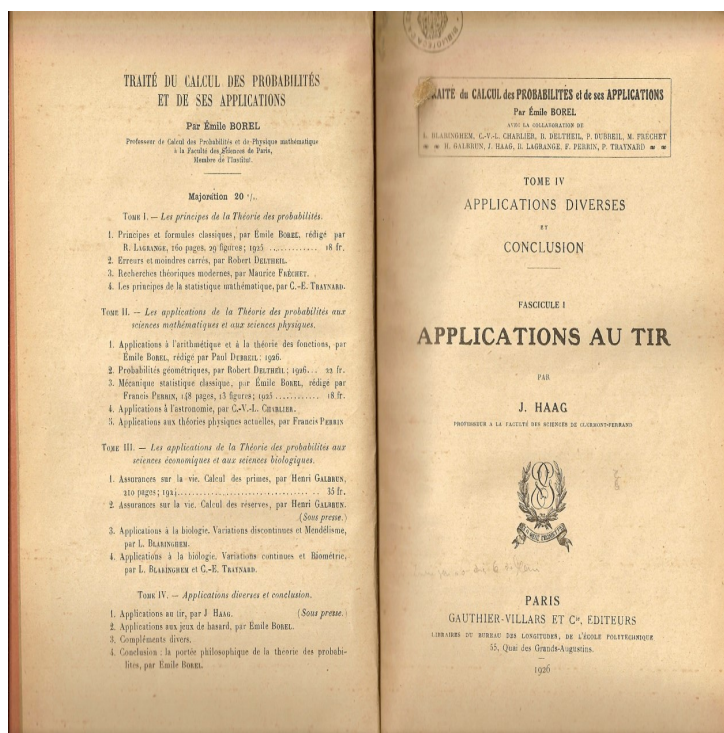


Figura 2 - Applications au Tir - J. Haag.

No segundo capítulo afirma que, como a teoria dos erros conduziu à Lei de Gauss^[2], é natural procurar encontrar uma solução análoga para o problema da dispersão. Este capítulo representa uma tentativa de edificação dessa teoria. O primeiro método proposto consiste numa reflexão das razões que levaram Gauss a estabelecer as Leis dos Erros, analisando essas causas e procurando estudar a teoria da dispersão e, a partir delas^[3], chegar ao estabelecimento de uma teoria matemática da dispersão.

No terceiro capítulo apresenta um estudo das propriedades da dispersão admitindo a Lei de Gauss. Começa inicialmente por obter as fórmulas do erro médio e do erro médio quadrático, para uma dispersão linear partindo da distribuição Gaussiana. Aplica esta lei ao estudo do tiro que explode por percussão, ou seja, o tiro ao alvo, cuja dispersão se efetua ao longo de uma elipse, análise probabilística essa que abrange diversas vertentes: banda retilínea indefinida^[4], a projeção numa direção qualquer^[5], o caso do paralelogramo cujos lados são direções conjugadas^[6], sector elíptico, ângulo ao centro, probabilidade num ângulo qualquer. Conclui que a citada Lei se aplica ao caso particular em que as elipses de probabilidade são círculos, apelidando-a de *Lei de Gauss Isotrópica*. De seguida, analisa o caso do tiro que se espalha lentamente, afirmando que os pontos de igual probabilidade sobre os elipsóides homotéticos do elipsóide unitário, e que apelida de elipsóides de probabilidade, afirmando, baseado em cálculos anteriores, que a probabilidade de o tiro se produzir no interior de um desses elipsóides é maior do que se produzir em todo o volume equivalente. Por fim, estuda o caso do prisma e do paralelepípedo, terminando o capítulo com o estudo do caso da probabilidade da projeção

de uma direção sobre um plano, concluindo que “a probabilidade das projecções dos tiros sobre uma direcção qualquer, paralelamente a um plano qualquer obedece à Lei de Gauss, com um erro unitário igual à média do segmento projectado sobre o eixo de projecção para os planos projectantes tangentes à elipsóide unitária, chegando igualmente à conclusão de que a projecção cilíndrica das explosões sobre um plano qualquer obedece a essa Lei com uma elipse unitária originada pela sombra projectada, quando supomos os raios luminosos paralelos à direcção dos projectantes”.

O capítulo quarto trata dos tiros balísticos e das tabelas de tiro^[7]. O autor começa por estudar o efeito do alcance, afirmando que o tiro balístico comporta n tiros de canhão, efetuados nas condições mais uniformes possíveis, adotando como condições teóricas certas condições médias, adotando o princípio do tiro de canhão fictício efetuado nessas condições. Introduce nesse conceito a noção de desvio^[8] em relação à média^[9], afirma que os erros são independentes, convergem assintoticamente para a Lei de Gauss^[10], tem um limite^[11], uma constatação que está na base do que actualmente se denomina de Teorema do Limite Central, se bem que estatísticos influentes continuem a fazer questão de o apelar simplesmente de Teorema do Limite. Introduce diversas noções, como, por exemplo, erro provável, erro médio e erro quadrático médio, incluindo nessas fórmulas o fator de correção $n-1$, uma novidade em relação às outras obras anteriormente analisadas, o que, segundo o autor, as torna mais exatas, concluindo que o método do erro quadrático médio é ligeiramente superior ao erro médio^[12]. A lei de probabilidade do erro unitário aplicada ao método da mediana, considerado mais rápido, embora sendo menos eficaz do que os anteriores^[13] e onde já surge igualmente a expressão *assimptótica à lei de Gauss*. Efectua uma abordagem ao método das diferenças sucessivas, da autoria do capitão Bréger, aconselhável quando existe alguma perturbação, atmosférica ou outra, aumentando a zona de dispersão, modificando a vertente teórica, não obedecendo à Lei de Gauss. As regras anteriormente descritas para cálculo do erro unitário caem também. Bréger propõe então que se recorra às diferenças entre dois tiros consecutivos, porque, neste caso, o enunciado descrito anteriormente varia muito pouco, uma vez que as diferenças sucessivas obedecem à Lei Normal e essa diferença é sempre constituída por grandezas independentes. A construção de tabelas de erros prováveis, os erros em direção, as elipses de probabilidade e os erros no plano de tiro são outros dos tópicos abordados.

O capítulo quinto é dedicado ao tiro ao alvo, aquilo que foi dito em relação ao tiro que explode por percussão continua válido para esta modalidade, haverá que considerar agora um plano vertical em vez de um plano horizontal. Em particular tudo o que foi dito para a determinação do ponto médio pode ser aplicado.

Afirma que o método mais preciso seria medir as coordenadas dos pontos de impacto em relação a dois eixos retangulares quaisquer que eles sejam e calcular a sua *média aritmética*. Se o número de pontos for numeroso, tal operação tornar-se-á um pouco fastidiosa e teremos então de nos contentar com o *método das medianas*, já anteriormente descrito. Um outro método mais expedito, segundo o autor, consiste em substituir cada mediana por uma direção equidistante dos pontos de impacto mais afastados. O ponto tomado como médio será então o centro do retângulo mínimo

contendo todos esses pontos e tendo os seus lados paralelos às duas direções retangulares dadas. O erro a rezear será desta vez maior do que um ou outro dos métodos anteriores.

É definido o conceito de justeza no tiro, como sendo a distância do ponto médio ao ponto visado. Quanto mais pequena for essa distância maior será a justeza. Em lugar do ponto médio real, toma-se como ponto de referência um ponto médio fictício, cometendo-se então um certo erro de onde é fácil encontrar a lei de probabilidade. Toma por origem o ponto visado e coloca-o no centro da circunferência, de onde se assimilam os erros aos diferenciais. Admite que a lei da dispersão segue a lei de Gauss Isotrópica, descrita no capítulo terceiro (quando as elipses são círculos).

No caso do tiro ao alvo, a zona de dispersão surge um pouco mais circular. Afirma que a experiência mostra que as elipses de probabilidade são geralmente círculos e aplica os métodos anteriormente descritos (mediana, média e média quadrática) ao tiro ao alvo, concluindo que a dispersão que lhe está associada segue a Lei de Gauss Isotrópica e, por essa via, determina o erro que lhes está associado, passando à descrição da Lei de probabilidade de razão unitária associada ao método do círculo mediano, e afirma que esta é assintótica à Lei de Gauss, determina o seu erro e conclui que o método do círculo mediano é muito menos bom do que o método da média quadrática. Descreve o método do círculo total, um caso particular do antecedente, definindo a variável x como o raio mais pequeno contendo todos os pontos de impacto. Termina com uma avaliação da precisão do tiro, supondo a elipse um círculo.

O capítulo sexto é dedicado à regulação do tiro, definido como a procura experimental dos elementos para os quais o ponto médio fictício coincide com um ponto médio dado à partida, apelidado de alvo ou objetivo. É fornecida uma regra muito simples para medir os erros: efetua-se um conjunto de tiros, partindo de uma determinada posição, e avaliam-se os erros algébricos (positivos ou negativos) em relação a um determinado ponto definido como objetivo. É feita uma introdução à teoria elementar da aproximação, descrevendo o método em uso pela artilharia francesa que começa com *dois tiros de ensaio por duas peças diferentes*^[14], sendo efetuadas de seguida correções a esse tiro e estabelecendo uma ponte com a teoria matemática rigorosa, fazendo uso da fórmula de Bayes e da Lei de Gauss. É descrito o modo de regular um conjunto de baterias (quatro, segundo o exemplo), fazendo a média das médias do desempenho de cada uma das baterias, o que constitui uma aplicação do teorema do limite. O capítulo termina com uma descrição do modo de regular o tiro em função de uma ou duas direções de referência (conjugadas ou não) e do modo de como efetuar essa correção.

O capítulo sétimo é dedicado à eficácia e ao rendimento do tiro aplicando a Lei de Poisson, e introduzindo fórmulas para avaliar esse rendimento, constituindo o capítulo oitavo uma aplicação do que foi dito no capítulo quinto ao tiro de caça.

O capítulo oitavo é dedicado à problemática relacionada com o tiro de caça, terminando a obra com uma série de notas, o que hoje poderíamos apelidar de anexos.

La probabilité dans les Tirs de Guerre de Jean Aubert com prefácio de M.M d'Ocane

No prefácio é salientado que a originalidade desta obra reside no facto de não ter sido elaborada no silêncio do gabinete, mas terá começado no fogo de ação por um jovem oficial de artilharia praticante, durante quatro anos e meio.

O descanso forçado devido a um ferimento grave permitiu-lhe organizar as suas ideias. O período de repouso entre a cessação das hostilidades e a sua reentrada na Escola Politécnica, concedido aos alunos regressados da frente, forneceu-lhe a ocasião para redigir o manual, apresentado sob a forma de pequeno livro.

Em relação aos problemas que estudou de uma forma isolada, fragmentada, *Jean Aubert* resolve organizá-los sob a forma de um princípio unificador, daí resultando um encadeamento lógico, tendo em vista despertar o interesse pelo estudo das questões colocadas, procurando, ao mesmo tempo, libertar-se de duas convenções; a primeira, de que os tiros compreendem um número infinito de ocorrências; e a segunda, admitir para cada um deles a existência de um ponto médio fixo e invariável, embora para efeitos estritamente didáticos, seguindo o caminho do mais simples para o mais complicado, supunha provisoriamente a existência de um ponto médio invariável. Estuda em particular os diversos métodos do tiro, a questão da precisão das determinações do erro provável de um canhão e os diversos problemas relacionados com o tiro resultante da simultaneidade das diversas peças.

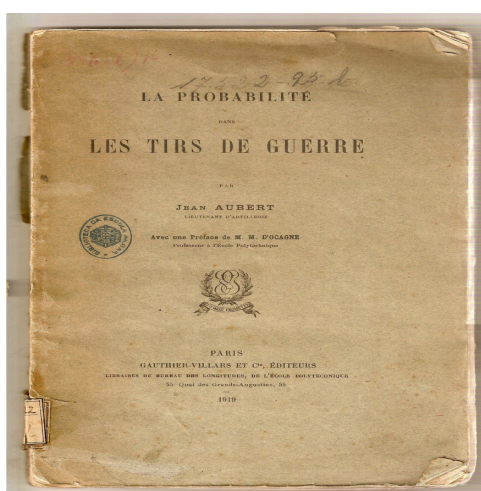


Figura 3 - La probabilité dans les Tirs de Guerre - J. Aubert.

No capítulo primeiro começa por abordar a noção de *grandeza eventual* (apresentada

para evitar confusões como sinónimo de experiência), que surge da noção de erro, erro esse que comporta uma medida dependente em parte do acaso, considerando este em si mesmo um valor numérico de medida, aproveitando a introdução do conceito para estabelecer logo uma relação com o tiro e sua curva de dispersão, curva de Gauss, abeirando-se do que hoje se designa por teorema do limite central. Assim, ao falar das grandezas eventuais independentes de média zero, afirma “heureusement, comme nous le verrons plus loin sur un exemple, la somme de grandeurs éventuelles, même très dissymétriques, est représentée, par une courbe qui se rapproche très rapidement d’une courbe de Gauss, à mesure que le nombre des composants augmente”.

O segundo capítulo é dedicado ao tiro em condições atmosféricas invariáveis, ou seja, a temperatura e a pressão atmosférica são consideradas constantes. O vento não é considerado nulo, mas somente invariável. Estas hipóteses múltiplas não suprimem as causas habituais da dispersão: velocidade inicial variável de um lado ao outro. Os obuses diferem uns dos outros pelo peso, a posição do centro de gravidade, a forma e o grau de polimento da superfície exterior. Começa por tratar o tema da dispersão em volta de um ponto médio real e aparente; procurando avaliar ao grau de eficácia do tiro num alvo, passa ao cálculo do coeficiente de eficácia relativa e à curva de frequência, e utiliza diversos métodos como o do ponto médio. Procura, de seguida, avaliar o erro provável de um canhão, descrevendo diversos métodos como o do ponto médio aparente, o dos erros entre tiros consecutivos, terminando com uma abordagem do tiro utilizando diversas peças.

No terceiro capítulo é abordado o tema do tiro em condições atmosféricas desfavoráveis, analisando-se os efeitos das variações de temperatura, do vento, da pressão atmosférica, procurando-se medir o grau de imprecisão (erro provável), quer no caso de uma peça quer no caso de várias peças.

No quarto e último capítulo é analisada a influência de novos fatores sobre o problema do tiro, como sejam: o fator tempo; a precisão de observação; a forma do terreno; as dimensões do objetivo; defeitos do canhão e das munições, relacionando estes fatores com a Lei de Gauss; passando, de seguida, a tratar da probabilidade resultante da combinação das diversas causas. Inspirando-se no teorema de Bayes analisa as causas *a priori* e *a posteriori*, terminando com a análise de questões diversas, como a maneira de arredondar a medida de um ângulo, tiro sem observação, tabelas de tiro e fatores morais.

Referências Bibliográficas

Aubert, J. (1919). La probabilité dans les tirs de guerre. Paris: Gauthier Villars.

Burilano, S. (1911). Probabilité du Tir. Paris: Octave Doin et Fils, Éditeurs.

Haag, J. (1926). Applications au Tir. Em Émilie Borel (Ed.), Traité du Calcul des Probabilités (Tomo IV). Paris: Gauthier Villars.

Papança, F. (2011). *A Matemática, a Estatística e o Ensino nos Estabelecimentos de Formação de Oficiais do Exército Português no Período 1837-1926: Uma Caracterização*. S. Mamede de Infesta: Edium Editores.

^[1] — Define ponto médio fictício como sendo a posição limite, aquela que tenderá a ser o centro das distâncias médias ou o ponto médio real dos impactos ou explosões de N projéteis se N aumentar indefinidamente sem que sejam modificadas as condições do tiro. Se não houver perigo de confundir ponto médio fictício com ponto médio real, aconselha a designar simplesmente por ponto médio.

^[2] — A Lei de Gauss era, naquela época, adotada pela quase totalidade dos artilheiros, apesar de algumas críticas.

^[3] — Na execução do tiro são cometidos pequenos erros e são eles que produzem a dispersão: erros da velocidade inicial e do coeficiente balístico, relacionados com o fabrico do material (mudança da pólvora, peso do projétil, repartição da massa, etc.), erros do ângulo de projeção e do desvio (da rota), provenientes da imprecisão das leituras dos níveis ou do suporte, ou do ângulo do levantamento, erro da duração do projeto, originado pela deslocação do ar ou pela intensidade da nuvem de pólvora.

^[4] — Conclui que a probabilidade associada a um ponto que caia entre duas direções paralelas obedece às leis da independência das probabilidades.

^[5] — Conclui que a probabilidade associada ao ponto de impacto, nas condições acima definidas, obedece à *lei de Gauss*.

^[6] — Paralelogramo cujos lados são paralelos aos diâmetros conjugados Ox e Oy .

^[7] — *Tiro balístico* é um tiro efetuado num polígono, em vista de recolher os dados experimentais necessários à confecção das tabelas de tiro. Os dados são o alcance, a derivação e os erros prováveis.

^[8] — Cada *tiro balístico* é na realidade efetuado nas condições que diferem ligeiramente das condições teóricas descritas acima.

^[9]
— O autor discute a hipótese, sugerida por alguns colegas, da introdução da mediana em vez da média, uma vez que esta se deixa influenciar menos pelos pontos extremos (tiros anormais); opta antes pela eliminação dos tiros anormais e pela utilização da média, por esta ser mais robusta. No entanto, se os dados estiverem muito concentrados sugere a mediana, por ser melhor do que a média e de cálculo mais rápido.

^[10]
— Afirma igualmente, inspirado no teorema de Bayes, que a probabilidade *a priori* é uniforme.

^[11]
— A ideia do limite teve a ver inicialmente com o estudo dos tiros anormais, seriam declarados se ultrapassassem um determinado limite.

^[12]
— Tal não poderia ser de outra forma, uma vez que desvio padrão é maior do que o desvio médio, tendo como base a fórmula geral das médias, a média quadrática é superior à média aritmética.

^[13]
— Este método pode ser melhorado recorrendo à derivada e à minimização.

^[14]
— O tiro de ensaio é definido nesta situação como a média aritmética dos valores obtidos com das duas peças.